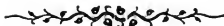
SUL

PENDOLO DI FAUCOULT

LETTERA

DEL SIG. PROF. F. MOSSOTTI

AL COMPILATORE

Estratta dagli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche pubblicati in Roma Aprile 1853.

ROMA
Tipografia delle Belle Arti
1853

SUL PENDOLO DI FAUCOULT

Sig. Professore

Sono indotto a scrivergli questa lettera da una Nota letta dal Chiariss. Sig. Prof. Bellavitis all'Istituto Veneto, pubblicata negli Atti di quella Società, e dal medesimo gentilmente trasmessami. In questa nota viene di nuovo messa in campo la teorìa del movimento azzimutale del piano d'oscillazione del pendolo di Faucoult, per cui credo a proposito di comunicargli alcuni risultati conseguiti con un lavoro che ho portato a termine da alcuni mesi, ma che non ebbi ancor tempo di compilare per pubblicazione.

Nell'aprile del 1851, allorchè l'esperimento del Sig. Faucoult era ancora una novità in Italia, interrogato dal Prof. Serpieri sulla spiegazione di alcune particolarità di quest'esperimento gli risposi con lettera che vidde in parte la luce ne'suoi pregievoli Annali (*), nella quale dimostrai che, quando il pendolo parte dalla verticale, il suo piano d'oscillazione deve avere rispetto ad un verticale terrestre un movimento dal sud verso l'ovest con una velocità angolare espressa dal prodotto della velocità angolare, n, della terra pel seno della latitudine, γ, del luogo dell'esperimento, cioè da $n\sin\gamma$. La supposizione che il pendolo parta dalla verticale, passante pel punto di sospensione, riduce l'esperimento alla sua purità, isola cioè l'elemento che si vuol prendere in considerazione, che è il movimento di rotazione dell'orizzonte, dagli altri elementi che possono complicarlo. La difficoltà però di mettere il pendolo in movimento, imprimendo al suo centro d'oscillazione una velocità in un piano verticale passante pel punto di sospensione, senza alterazioni di sorta, ha fatto sì che gli sperimentatori s'appigliassero piuttosto al

(*) Annali di Scien. Matem. e Fis. Tom. II. Maggio 1851.

mezzo d'allontanare il pendolo dalla verticale per indi abbandonarlo a se stesso. Impiegando questo mezzo s'introduce un'altro elemento, il quale si è che nell'atto che il pendolo parte dalla quiete apparente possiede in realtà una velocità di rotazione intorno alla verticale, passante pel punto di sospensione, espressa da $ln \sin\gamma \sin \alpha_0$; l dinotando la lunghezza del pendolo ed α_0 l'angolo di cui è stato deviato al principio del movimento. La distanza a cui si spostano comunemente i pendoli dalla verticale nei detti esperimenti essendo piccola, ed il valore di n per un secondo di tempo medio essendo espresso, in parti del raggio delle tavole, dalla frazione 0,000072921, la detta velocità risulta assai tenue, ed il suo effetto può riguardarsi, con vocabolo astronomico, come una piccola perturbazione del moto che avrebbe il pendolo senza di essa. Ciò non pertanto come il P. Secchi fece conoscere, qualche tempo dopo ch' ebbi scritto la citata lettera, delle pregevoli esperienze che dimostravano delle anomalie nel movimento del pendolo, mi venne la curiosità d'indagare sino a qual punto la detta velocità iniziale del medesimo intorno alla verticale, la diversità d' azzimut in cui è posto in moto e la resistenza dell' aria potessero modificare i risultati ottenuti nel caso semplice considerato prima. Poichè i calcoli necessarii alla soluzione del probleba in questo secondo caso sono stati dallo stesso Sig. Prof. Bellavitis riputati difficili, ed in vero, quantunque non presentino difficoltà speciali d'integrazione, esigono però d'essere condotti con un certo tatto per arrivare, senza complicazioni, a riconoscere il movimento del pendolo dopo un numero indefinito d' oscillazioni, mi sono determinato a far subito noto i principali risultamenti ottenuti.

Ciò che mette una differenza analitica nelle equazioni differenziali spettanti alle oscillazioni del pendolo di Faucoult nei due modi di porlo in moto, si è la presenza di una costante arbitraria. Nel primo modo questa costante è nulla,

e l'angolo θ (*), il quale esprime l'azzimut della projezione orizzontale del pendolo rappresenta anche la direzione del piano d'oscillazione perchè essa rimane piana : nel secondo modo la detta costante ha un piccolissimo valore , e quantunque l'oscillazione sia ancora sensibilmente piana, pure la projezione del pendolo, non divenendo mai matematicamente nulla la sua estremità esteriore viene a descrivere una curva che non passa più per la verticale del punto dl sospensione, e l'angolo θ compie all'incirca, nel tempo di una doppia oscillazione, un'intera rivoluzione intorno alla detta linea.

Cercando l'espressione di quest'angolo ho trovato che nell'intervallo del tempo T in cui la distanza del pendolo dalla verticale passa da un valor massimo al successivo è data da

$$\pi - \left(\sin\gamma - \frac{3p\sin\alpha}{8}\right)n\mathrm{T}$$

il valore di $p\sin\alpha$ essendoci porto da

$$p\sin\alpha = \left[\sin\gamma\sin^2\alpha_0 + \frac{2}{3}\cos\gamma\sin\varepsilon\sin^3\alpha_0\right]e^{-(\mu\Theta+\nu\mathrm{S})}$$

nella qual formola α_0 denota l'angolo che il pendolo fa colla verticale al principio del movimento, ε l' azzimut del piano verticale in cui il medesimo è stato rimosso , valutato dal punto ovest verso il punto sud : i coefficienti μ e ν sono quelli della resistenza dell'aria supposta espressa da due termini, uno proporzionale alla velocità semplice l'altro al quadrato, Θ rappresenta il tempo decorso dal principio del movimento sino a quello dell'oscillazione che si considera , ed

(*) Vedi il citato fascicolo di Maggio pag. 235 , equazione ultima In quest' equazione l'angolo θ può anche intendersi riferito ad una linea orizzontale, che non partecipi della rotazione dell'orizzonte intorno alla verticale ponendo in essa $-nt\sin\gamma+\theta$ in luogo di θ. Vedi anche la nota alla XX Lezione pag. 242 della Meccanica razionale in corso di stampa.

S lo spazio percorso dal pendolo espresso in parti della sua lunghezza, ossia per approssimazione la somma di tutti gli archi che misurano le amplitudini delle oscillazioni descritte.

L'effetto della resistenza dell'aria rappresentato dal fattore esponenziale è di far diminuire il valore di $p \sin \alpha$ ad ogni nuova oscillazione. Trascurando quest'effetto, il termine $p \sin \alpha$ conserverebbe in tutto il tempo dell'esperimento il valor massimo che compete al caso della resistenza; ciò non ostante, supponendo, come nell' esperienza del P. Secchi del giorno 7 maggio 1851 (*),

$$\alpha_0 = 0°, 53'. 49'', \ \gamma = 41°, 53'. 52'',$$

il primo termine del valore di $p \sin \alpha$ darebbe, per $5.^{or}\ 6^m.\ 22^s$ di tempo medio che la medesima ha durato, una correzione azzimutale di soli 17″, quantità non discernibile in questa sorta d' esperimenti. Il termine seguente dipendente dal seno dell'azzimut ε sarebbe tuttavia più piccolo e da non tenersene conto, per cui si può conchiudere che non vi è differenza notevole nella rotazione apparente del piano d'oscillazione del pendolo nei due modi di metterlo in movimento.

Non istarò a riferire la formola che dà la distanza del pendolo dal punto infimo sulla verticale, in cui rimarrebbe se fosse fermo, nel caso che si tenga conto della resistenza dell' aria, perchè essa è un po' composta. Dirò soltanto che, prescindendo da questa resistenza, le dette distanze sono rappresentate con approssimazione più che sufficiente da

$$\delta^2 = c^2 \cos^2 \frac{\pi t}{T} + \frac{e^4}{2l^2} \sin^2 \frac{2\pi t}{T} + b^2$$

essendo

(*) Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei. Anno IV. Maggio 1851 pag. 332.

$$c^2 = a^2 - b^2\,, \quad a = 2l \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0\,, \quad b = \frac{lp \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{g}}$$

per cui a è la massima distanza a cui giunge il pendolo dalla verticale e b la minima, come è facile da verificarsi. Calcolando il valore di b pel citato esperimento, in cui vi aveva $l = 31950^{mm}$, $g = 98942^{mm}$, risulta $b = 0^{mm}, 035$; cioè trentacinque millesimi di millimetro. Siccome questo valore è altresì, con grandi prossimità, al vero quello della più gran distanza del pendolo dal piano passante per la linea degli apsidi, così si vede che ogni sua oscillazione può aversi per piana. La resistenza dell'aria facendo diminuire l'amplitudine delle oscillazioni fa pure decrescere il valore della distanza in discorso.

Mi è piaciuto di riferire questi risultamenti per prevenire i lettori, che la differenza delle formole che danno il valore della derivata $\frac{d\theta}{dt}$ nei due modi di mettere in moto il pendolo, e sulla quale s'aggirano le dette considerazioni del Sig. Prof. Bellavitis, quantunque sia notevole per l' analisi, non trae, nelle esperienze ordinarie, un cambiamento sensibile sul movimento che ne segue. Ciò era anche presumibile quasi senza calcolo, osservando che il pendolo, per esempio del P. Secchi, partendo colla velocità che ha nell'istante in cui viene abbandonato, verrebbe alla metà della prima oscillazione a passare a lato della verticale, corrispondente al suo punto di sospensione, ad una distanza certamente $< 0^{mm}, 055$ (*), e che da quest'istante il suo movimento deve verosimilmente confondersi, entro stretti limiti, con quello d' un altro pendolo eguale che parta contemporaneamente colla medesima velocità dalla verticale stessa.

Pisa li 16 Marzo 1853.

(*) È il valore di $\frac{1}{2}\, ln \sin \gamma \sin \alpha$.